Metode numerice și statistică

Curs 1

lect. Ciprian Deliu
cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2020

Organizare

- Procente nota finală
- Prezență laborator
- Parțial
- Materiale:
  - moodle.deliu.ro - materiale în format pdf
  - Lepădatu D., *Metode Numerice*, 2007
  - Păltineanu G., *Bazele Analizei Numerice*, 2001
  - Press W.H., *Numerical Recipes*, 2007
  - Breaz N., *Probabilități și statistică*, 2013
  - Triola M.F., *Elementary Statistics*, 2012
  - Devore J.L., *Modern Mathematical Statistics with Applications*, 2012

Structură curs

I Metode Numerice
1. Metode de aproximare a rădăcinilor unei ecuații neliniare
2. Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare și neliniare
3. Aproximarea funcțiilor. Interpolare
4. Integrarea numerică a funcțiilor
5. Aproximarea numerică a soluțiilor ecuațiilor diferențiale

II Statistică
1. Statistică descriptivă
2. Teoria probabilităților
3. Repartiții discrete și continue
4. Estimatori. Intervale de încredere
5. Teste statistice

Sistem iterativ

- Fie A o mulțime dată și o aplicație $T : A \to A$. Presupunem că există posibilitatea de a cuantifica elementele lui A, și notăm aceste elemente cu a_k sau $a^{(k)}$, cu $k = 0, 1, 2, \dots$.
- Ansamblul (A, T) formează un **sistem iterativ** dacă se poate defini o relație între elementele lui A de forma
$$a_{k+1} = T(a_k)$$
- Se pornește de la o valoare inițială $a_0 \in A$ și apoi la fiecare pas k se calculează a_{k+1} aplicând T valorii a_k calculate la pasul anterior.
- Un element $a \in A$ se numește **punct fix** pentru T dacă
$$T(a) = a$$
- Elementele a_k formează un șir în spațiul ce conține A numite și **aproximante** pentru punctul fix al lui T.

- În acest capitol ne vom ocupa de sisteme iterative cu mulțimea suport $\mathbb{R}$, iar aplicația T poate avea proprietăți legate de continuitate și diferențiabilitate.
- Convergența șirului de aproximante către punctul fix este asigurată de aceste proprietăți ale lui T, precum și de unele condiții suplimentare.
- Oprirea iterațiilor se face atunci când este îndeplinită o condiție de forma
$$\|a_{k+1} - a_k\| < \varepsilon$$
pentru un $\varepsilon > 0$ suficient de mic, sau după atingerea unui anumit număr de iterații.
- De asemenea este importantă și abaterea de la punctul fix a aproximantei la care se opresc iterațiile, numită și **eroare de calcul**, sau **eroarea metodei**.

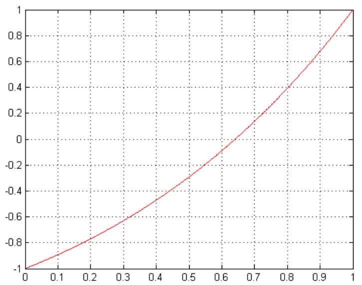
Metoda iterativă de punct fix

- Presupunem că ecuația
$$f(x) = 0$$
are o rădăcină pe care am localizat-o printr-o metodă cum ar fi de exemplu metoda grafică. Mai presupunem că această ecuație poate fi scrisă sub forma
$$x = g(x).$$
- Pentru aproximarea rădăcinii ecuației în această formă vom folosi metoda iterativă de punct fix construind următorul procedeu iterativ:
$$x_{k+1} = g(x_k)$$
cu $k = 0, 1, 2, \dots$ unde x_0 se alege cât mai aproape de rădăcina căutată.
- O astfel de metodă este convergentă dacă
$$|g'(x)| \le \lambda < 1$$
- Dacă notăm cu α punctul fix căutat, eroarea metodei, notată cu E_k, dacă ne oprim la aproximanta x_k este dată de
$$|E_k| = |x_k - \alpha| \le \frac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_1 - x_0|$$

Exemplu

Să se aproximeze rădăcina ecuației $x2^x - 1 = 0$ din intervalul $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ cu o eroare $\varepsilon = 10^{-3}$.
Rezolvare: Reprezentăm grafic funcția $f(x) = x2^x - 1$ pe intervalul $[0, 1]$ cu ajutorul următorului script **Matlab**:

```
x=0:0.001:1;
y=x.*2.^x-1;
plot(x,y,'r');
grid
```



- Observăm că ecuația $f(x) = 0$ are o singură rădăcină în $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$;
- Punem ecuația sub forma $x = g(x)$, deci $g(x) = 2^{-x}$;
- Derivata $g'(x) = -2^{-x}\ln 2$ verifică ipoteza de convergență:
$$|g'(x)| = 2^{-x}\ln 2 = \frac{\ln 2}{2^x} \le \frac{\ln 2}{2^{\frac{1}{3}}} = 0,5501 < 1$$
- Inițializăm cu $x_0 = 1$ și din formula erorii $|E_k| < \varepsilon$ obținem $n = 10$ iterații:
$$x_1 = g(x_0) = 2^{-1} = \tfrac{1}{2} = 0,5$$
$$x_2 = g(x_1) = 2^{-0,5} = 0,7071$$
$$x_3 = g(x_2) = 2^{-0,7071} = 0,6125$$
$$x_4 = g(x_3) = 2^{-0,6125} = 0,6541$$
$$x_5 = g(x_4) = 2^{-0,6541} = 0,6355$$
$$x_6 = g(x_5) = 2^{-0,6355} = 0,6437$$
$$x_7 = g(x_6) = 2^{-0,6437} = 0,6401$$
$$x_8 = g(x_7) = 2^{-0,6401} = 0,6416$$
$$x_9 = g(x_8) = 2^{-0,6416} = 0,641$$
$$x_{10} = g(x_9) = 2^{-0,641} = 0,641$$

procedura MATLAB:

```
function [N,x,X]=tpfix(g,dg,a,b,x0,tol)
x=a:tol:b;
y=feval(dg,x);
A=max(abs(y));
X(1)=x0;
B=abs(feval(g,X(1))-X(1));
N=fix(log(tol*(1-A)/B)/log(A));
for k=2:N
    X(k)=feval(g,X(k-1));
    err=abs(X(k)-X(k-1));
    relerr=err/(abs(X(k)-X(k-1)));
    x=X(k);
    if (err<tol)|(relerr<tol)
        break
    end
end
X=X';
```

```
[N,x,X]=tpfix('fg','fdg',0,1,1,0.001)
```

unde N = numărul de iterații, x = soluția căutată, X = iterațiile

- funcția $g(x)$:

```
function y=fg(x)
y=2.^(-x);
end
```

- derivata $g'(x)$:

```
function dy=fdg(x)
dy=-2.^(-x).*log(2);
end
```

- (a, b) intervalul rădăcinii
- $x0$ valoarea inițială
- tol = ε (eroarea)

Metoda bisecției

- Presupunem că ecuația
$$f(x) = 0$$
are o singură rădăcină localizată în intervalul $[a, b]$, deci $f(a)f(b) < 0$;
- Metoda bisecției presupune înjumătățirea intervalului și alegerea jumătății care conține rădăcina. Se repetă acest raționament până la un interval convenabil:

Pas 1 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Dacă $f(c_1) = 0$, atunci c_1 este rădăcina căutată.
Dacă $f(c_1)f(a_1) > 0$ atunci rădăcina se află în $[c_1, b_1]$

Pas 2 $a_2 = c_1, b_2 = b_1, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$
Dacă $f(c_1)f(a_1) < 0$ atunci rădăcina se află în $[a_1, c_1]$

Pas 2 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$
și repetăm raționamentul pentru intervalul $[a_2, b_2]$.

- Dacă $|b - a| = l$ atunci $|b_1 - a_1| = l \Rightarrow |b_2 - a_2| = \frac{l}{2} \Rightarrow \dots |b_k - a_k| = \frac{l}{2^{k-1}}$, care poate fi folosită drept criteriu de oprire: dacă $c = \frac{a_k+b_k}{2}$, rădăcina $\alpha \in (a_k, b_k)$ și $|c - \alpha| < \frac{l}{2^{k-1}} < \varepsilon$.
- Un alt criteriu de oprire poate fi: $\frac{|c_n - c_{n-1}|}{|c_n|} \leq \varepsilon \Rightarrow \alpha \simeq c_n$.

Exemplu

Să se aproximeze rădăcina ecuației
$$2x \ln x = 1$$
care se află în intervalul $[1, 2]$ cu eroarea $\varepsilon = 0,02$.
Rezolvare: Funcția din problemă este $f(x) = 2x \ln x - 1$. Notăm cu α rădăcina căutată. Observăm că $f(1) = -1$ și $f(2) = 1,7726$, adică sunt semne contrare. Aplicăm metoda înjumătățirii și ordonăm calculele în tabelul următor:

i	a_i	b_i	$c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$	$f(c_i)$	Concluzii
1	1	2	1.5	0.2164	$\alpha \in (1, 1.5)$
2	1	1.5	1.25	-0.4421	$\alpha \in (1.25, 1.5)$
3	1.25	1.5	1.375	-0.1243	$\alpha \in (1.375, 1.5)$
4	1.375	1.5	1.4375	0.0434	$\alpha \in (1.375, 1.4375)$
5	1.375	1.4375	1.4073	-0.0411	$\alpha \in (1.4063, 1.4375)$
6	1.4063	1.4375	1.4219	0.0001	$\alpha \in (1.4063, 1.4219)$
7	1.4063	1.4219	1.4141	-0.00009	

Criteriul de oprire $\frac{|1.4219-1.4141|}{1.4219} = 0.005 < 0.02 \Rightarrow c = \frac{1.4219+1.4141}{2} = 1.418$

procedura MATLAB:

```
function [c,err,Yc]=mbisect(f,a,b,tol)
Ya=feval(f,a)
Yb=feval(f,b)
if Ya*Yb>0, return, end
N=1+round((log(b-a)-log(tol))/log(2));
for k=1:N
    c=(a+b)/2
    Yc=feval(f,c);
    if Yc==0
        a=c;
        b=c;
    elseif feval(f,c)*feval(f,a)<0
        b=c;
        Yb=Yc;
    else a=c;
        Ya=Yc;
    end
    if b-a<tol, break, end
end
c=(a+b)/2;
err=abs(b-a);
Yc=feval(f,c);
```

- funcția $f(x)$:

```
function y=fn(x)
y=2*x*log(x)-1;
end
```

- (a, b) intervalul rădăcinii
- tol = ε (eroarea)
- Procedura se apelează cu sintaxa

```
[c,err,Yc]=mbisect('fn',-1,2,0.02)
```

- c = rădăcina
- err = $\frac{l}{2^{k-1}} < \varepsilon$
- Yc = $f(c)$

Metoda falsei poziții

- Presupunem că ecuația
$$f(x) = 0$$
are o singură rădăcină localizată în intervalul $[a, b]$, deci $f(a)f(b) < 0$;
- Ca și la metoda bisecției, la fiecare pas se împarte intervalul curent în două subintervale, dar nu neapărat la jumătatea intervalului.

Pas 1 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = b_1 - \frac{(b_1-a_1)f(b_1)}{f(b_1)-f(a_1)}$.
Dacă $f(c_1) = 0$, atunci c_1 este rădăcina căutată.
Dacă $f(c_1)f(a_1) > 0$ atunci rădăcina se află în $[c_1, b_1]$

Pas 2 $a_2 = c_1, b_2 = b_1, c_2 = b_2 - \frac{(b_2-a_2)f(b_2)}{f(b_2)-f(a_2)}$
Dacă $f(c_1)f(a_1) < 0$ atunci rădăcina se află în $[a_1, c_1]$

Pas 2 $a_2 = a_1, b_2 = c_1, c_2 = b_2 - \frac{(b_2-a_2)f(b_2)}{f(b_2)-f(a_2)}$
și repetăm raționamentul pentru intervalul $[a_2, b_2]$.

Pas n Se construiește intervalul (a_n, b_n) și se studiază semnul funcției f în punctul
$$c_n = b_n - \frac{(b_n - a_n)f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

- Criteriul de oprire poate fi $|c_n - c_{n-1}| \leq \varepsilon$ sau $|f(c_n)| < \varepsilon$.

Exemplu

Să se aproximeze rădăcina ecuației
$$2x \ln x = 1$$
care se află în intervalul $[1, 2]$ cu eroarea $\varepsilon = 0,001$.
Rezolvare:
Funcția din problemă este $f(x) = 2x \ln x - 1$. Notăm cu α rădăcina căutată.

- $f(1) = -1$, $f(2) = 1,7726$, deci $f(1)f(2) < 0$.
- Notăm $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ și calculăm
$$c_1 = 2 - \frac{(2-1)f(2)}{f(2) - f(1)} = 2 - \frac{(2-1) \cdot 1,7726}{1,7726 + 1} = 1,3607$$
- $f(c_1) = -0,1619 < 0$, deci $\alpha \in (c_1, b_1)$
- Notăm $a_2 = c_1 = 1,3607$, $b_2 = b_1 = 2$ și calculăm
$$c_2 = 2 - \frac{(2 - 1,3607)f(2)}{f(2) - f(1,3607)} = 2 - \frac{(2-1) \cdot 1,7726}{1,7726 + 0,1619} = 1,4142$$
- $f(c_2) = -0,0198 < 0$, deci $\alpha \in (c_2, b_2)$

Se continuă în acest mod până se găsesc două valori consecutive pentru c_n care să aibă primele trei zecimale care să coincidă.

procedura MATLAB:

```
function [c,err,yc]=mfp(f,a,b,delta,epsilon, max1)
ya=feval(f,a);
yb=feval(f,b);
for k=1:max1
    dx=yb*(b-a)/(yb-ya);
    c=b-dx;
    ac=c-a;
    yc=feval(f,c);
    if yc==0,break;
    elseif yb*yc>0
        b=c;
        yb=yc;
    else a=c;
        ya=yc;
    end
    dx=min(abs(dx),ac);
    if abs(dx)<delta,break,end
    if abs(yc)<epsilon,break,end
end
c;
err=abs(b-a)/2;
yc=feval(f,c);
```

- funcția $f(x)$:

```
function y=fn(x)
y=2*x*log(x)-1;
end
```

- (a, b) intervalul rădăcinii
- delta = eroarea dată pentru rădăcina c
- epsilon = eroarea cerută pentru $f(c)$
- max1 = numărul maxim de interații
- Procedura se apelează cu sintaxa

```
[c,err,yc]=mfp('fn',1,2,0.001,0.001,10)
```


Exerciții

1. Folosind metoda iterativă de punct fix să se aproximeze rădăcinile următoarelor ecuații cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$:
   a) $x - \sin x = 0.25$, $x \in [1, 1.3]$
   b) $2^x = 4x$, $x \in [0, 1]$
   c) $2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $x \in [0, 1]$
   d) $1 - x - 2\cos x = 0$, $x_0 = 0$, $x \in (-1, 0]$
   e) $x^2 - e^x + 1.5 = 0$, $x_0 = 0$, $x \in [0, 1)$
2. Folosind metoda bisecției să se aproximeze rădăcinile următoarelor ecuații cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$:
   a) $4^x - 2\cos x = 0$, $x \in [0, 1]$
   b) $\arcsin(x/3) - \cos x = 0$, $x \in [1, 2]$
   c) $x^2 - 4\cos 2x = 0$, $x \in [0, 1]$
   d) $x^2 - e^x + 1.5 = 0$, $x \in [0, 1]$
3. Să se aplice metoda falsei poziții la ecuațiile anterioare și să se compare rezultatele cu cele obținute cu primele două metode.