Metode numerice și statistică
Curs 8

lect. Ciprian Deliu
cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2019

Evenimente și operații cu evenimente

- Prin **experiență aleatoare** înțelegem acele experiențe în care intervine întâmplarea. Rezultatele posibile ale unei experiențe aleatoare se numesc probe sau cazuri posibile ale experienței.
- Numim **eveniment aleator** sau, mai simplu, **eveniment** (atașat unei experiențe) orice situație care se poate realiza prin una sau mai multe probe și despre care putem spune cu certitudine că s-a produs sau nu.
- Evenimentul *elementar* este un eveniment care se realizează printr-o singura probă a experienței. Evenimentul *compus* este acel eveniment care se realizează prin mai multe probe.
- Evenimentul *sigur* este acel eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienței, adică prin oricare dintre probe. Evenimentul *imposibil* este evenimentul care nu se realizează prin nici o probă a experienței.
- Evenimentul *contrar* unui eveniment dat este evenimentul care se realizează atunci și numai atunci când nu se realizează evenimentul dat.

Exemplu: Fie $\mathcal{E}$ experiența aruncării simultane a două zaruri. Probele experienței sunt perechile $(1,1),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)$. Proba (i,j) reprezintă apariția feței cu numărul i de puncte de la primul zar și a feței cu numărul j de puncte de la al doilea zar. Numărul tuturor probelor (al cazurilor posibile) este 36. Fie A evenimentul ca suma de pe cele două fețe să fie 5. A se realizează prin probele $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$, deci este un eveniment compus. Evenimentul B care constă în apariția probei $(3,7)$ este un eveniment imposibil, iar evenimentul C care constă în apariția oricărei perechi este un eveniment sigur.

- Evenimentul sigur se notează cu Ω, evenimentul imposibil cu $\varnothing$, iar evenimentul contrar lui A se va nota cu $\bar{A}$. Avem evident $\bar{\Omega}=\varnothing$, $\bar{\varnothing}=\Omega$, $\bar{\bar{A}}=A$.
- Două evenimente se numesc *echivalente* dacă ele se realizează prin aceleași probe. Spunem că evenimentul A implică evenimentul B (vom nota atunci $A\subset B$) dacă orice probă care realizează evenimentul A, realizează și evenimentul B. Are loc evident $A\subset\Omega$ și $\varnothing\subset A$, oricare ar fi evenimentul A.
- Evenimentele A și B se numesc *compatibile* dacă se pot realiza simultan, adică dacă există probe care realizează atât pe A cât și pe B. În caz contrar evenimentele se numesc *incompatibile* sau *disjuncte*.
- Date două evenimente A și B numim reuniunea lor (notată $A\cup B$) evenimentul care se realizează atunci când se realizează cel puțin unul dintre evenimentele A și B. Se numește intersecția evenimentelor A și B (notată $A\cap B$) evenimentul care se realizează atunci când se realizează simultan evenimentele A și B.
- Evenimentele A și B sunt disjuncte dacă $A\cap B=\varnothing$.

Teoremă (Proprietăți ale operațiilor cu evenimente)

1. *Dacă* $A\subset B$, *atunci* $A\cup B=B$ *și* $A\cap B=A$.
2. $A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cup\bar{A}=\Omega,\ A\cup\Omega=\Omega,\ \Omega\cup\varnothing=\Omega,$
   $A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap\bar{A}=\varnothing,\ A\cap\Omega=A,\ \Omega\cap\varnothing=\varnothing.$
3. *Dacă* $A\subset C$ *și* $B\subset C$, *atunci* $A\cup B\subset C$ *și* $A\cap B\subset C$.
4. $A\cup B=B\cup A,\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$
   $A\cap B=B\cap A,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

Câmp de evenimente

Fie $\Omega=\{E_1,\ldots,E_n\}$ mulțimea evenimentelor elementare corespunzătoare unei experiențe aleatoare și $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ o mulțime nevidă de evenimente.

Definiție

Cuplul $(\Omega,\mathcal{K})$ *se numește* **câmp finit de evenimente** *dacă:*

i. $\forall A\in\mathcal{K}\Rightarrow\bar{A}\in\mathcal{K}$

ii. $\forall A,B\in\mathcal{K}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{K}$.

Observații:

1. Într-un câmp finit de evenimente $(\Omega,\mathcal{K})$ sunt adevărate afirmațiile:
   - $A,B\in\mathcal{K}\Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{K}$
   - $\varnothing\in\mathcal{K}$ și $\Omega\in\mathcal{K}$
   - $A,B\in\mathcal{K}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{K}$
2. Dacă mulțimea evenimentelor elementare este infinită dar numărabilă atunci $(\Omega,\mathcal{K})$ se numește **câmp infinit de evenimente** dacă:
   i. $\forall A\in\mathcal{K}\Rightarrow\bar{A}\in\mathcal{K}$
   ii. $\forall A_i\in\mathcal{K}, i\in I\subset\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathcal{K}$

Definiție

Într-un câmp finit de evenimente $(\Omega,\mathcal{K})$, *spunem că evenimentele* $A_i\in\mathcal{K},\ i=1,\ldots,n$ *formează un* **sistem complet de evenimente** *(sau o* **partiție** *a câmpului) dacă:*

i. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

ii. $A_i\cap A_j=\varnothing, \forall i\neq j, i,j=1,\ldots,n$

Evenimentele elementare corespunzătoare unei experiențe formează un sistem complet de evenimente.
$\Omega=\{E_1,\ldots,E_n\}$ împreună cu $\mathcal{K}=\mathcal{P}(\Omega)$ este un câmp finit de evenimente care conține 2^n evenimente:

$\varnothing$,
$\{E_1\},\ldots,\{E_n\}$ în număr de $n=C_n^1$
$\{E_i,E_j\},\ i,j=\overline{1,n},\ i<j$, în număr de C_n^2,
$\vdots$
$\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}=\Omega$, în număr de $1=C_n^n$.

deci numărul total de evenimente este $1+C_n^1+\cdots C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

Câmp de probabilitate

Definiție (axiomatică a probabilității)

Fie $(\Omega,\mathcal{K})$ *un câmp finit de evenimente. Se numește* **probabilitate** *pe câmpul considerat o funcție* $P:\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ *care satisface axiomele:*

i. $P(A)\geq 0,\ \forall A\in\mathcal{K}$

ii. $P(\Omega)=1$

iii. $P(A\cup B)=P(A)+P(B),\ \forall A,B\in\mathcal{K}, A\cap B=\varnothing$.

Tripletul $(\Omega,\mathcal{K},P)$ se numește **câmp finit de probabilitate**.

- Au loc relațiile:
  1. $P(\varnothing)=0$
  2. $P(\bar{A})=1-P(A)$
  3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\ \forall A_i\in\mathcal{K}, i=1,\ldots,n$ cu $A_i\cap A_j=\varnothing$ pentru $i\neq j$.
- În cazul unui câmp infinit de evenimente, axioma a treia din definiția probabilității devine:
  iii. $P\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\sum_{i\in I}P(A_i),\ \forall A_i\in\mathcal{K}, i\in I\subseteq\mathbb{N}$ și $A_i\cap A_j=\varnothing$ pentru $i\neq j$.

Reguli de calcul cu probabilități

1. Probabilitatea diferenței:
$$P(B\setminus A)=P(B)-P(A),\ \forall A,B\in\mathcal{K},\ A\subset B.$$
2. Probabilitatea reuniunii (formula lui Poincare)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ \forall A,B\in\mathcal{K}.$$
3. Probabilități condiționate: dacă $B\in\mathcal{K}$ și $P(B)\neq 0$, atunci funcția
$$P_B:\mathcal{K}\to\mathbb{R},\ P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
este o probabilitate pe $(\Omega,\mathcal{K})$.
   - Probabilitatea condiționată $P_B(A)$ se mai notează cu $P(A|B)$.
   - $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$
   - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n|\cap_{i=1}^{n-1}A_i)$
   - Dacă evenimentele A și B sunt independente, atunci
$$P_B(A)=P(A)\text{ și }P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

4. Probabilitatea reuniunii evenimentelor independente: dacă $A_1,A_2,\ldots,A_n$ sunt evenimente independente, atunci
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$
5. Inegalitatea lui Boole:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$
6. Formula probabilității totale: dacă $A_1,A_2,\ldots,A_n$ este un sistem complet de evenimente și $X\in\mathcal{K}$ atunci
$$P(X)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)$$
7. Formula lui Bayes: dacă $A_1,A_2,\ldots,A_n$ este un sistem complet de evenimente și $X\in\mathcal{K}$ atunci
$$P_X(A_k)=\frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(X)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)},\ \forall k=1,2,\ldots,n.$$

Schema lui Poisson

- Fie E o experiență care constă în efectuarea a n experiențe independente $E_i,\ i=\overline{1,n}$. Considerăm de asemenea evenimentele A_i legate de experiențele $E_i,\ i=\overline{1,n}$.
- Probabilitatea evenimentului care constă în realizarea a k $(0\leq k\leq n)$ din cele n evenimente, atunci când se efectuează experiența E, este coeficientul lui x^k din polinomul
$$Q(x)=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\ldots(p_nx+q_n),$$
unde $p_i=P(A_i),\ q_i=P(\bar{A}_i),\ i=\overline{1,n}$.
- Considerăm cazul particular $n=4,k=2$ și fie A evenimentul care constă în realizarea a două din cele patru evenimente. Avem:
$$A=(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\cap A_4)\cup(\bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3\cap A_4)\cup(\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap\bar{A}_4)\cup$$
$$\cup(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap A_4)\cup(A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\cap\bar{A}_4)\cup(A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4)$$
$$P(A)=q_1q_2p_3p_4+q_1p_2q_3p_4+q_1p_2p_3q_4+p_1q_2q_3p_4+p_1q_2p_3q_4+p_1p_2q_3q_4$$
care este egală cu coeficientul lui x^2 din polinomul $Q(x)$.

- O variantă a schemei lui Poisson se obține atunci când se consideră un același eveniment legat de fiecare din cele n experiențe, în loc de n evenimente diferite. Probabilitatea ca evenimentul considerat să se realizeze de k ori și să nu se realizeze de $n-k$ ori este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul $Q(x)$.
- Exemplu: se dau n urne care conțin bile albe și negre în diferite proporții. Se cunosc p_i, probabilitățile evenimentelor care constau în extragerea unei bile albe din urna i, $i=\overline{1,n}$. Probabilitatea evenimentului care constă în obținerea a k bile albe și $n-k$ bile negre când din fiecare urnă se extrage câte o bilă este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul $Q(x)$.
- Exercițiu: Trei loturi conțin 6%, 8%, respectiv 7% produse defecte. Se extrage la întâmplare câte un produs din fiecare lot. Să se afle probabilitățile evenimentelor:
  a) A={un produs este defect}
  b) B={un produs este bun}
  c) C={toate produsele nu sunt bune}
  d) D={toate produsele sunt defecte}
  e) E={cel mult un produs este defect}
  f) F={cel puțin două produse sunt defecte}

Schema lui Bernoulli (binomială)

- Fie A un eveniment care se realizează cu probabilitatea p la efectuarea experienței E. În aceste condiții, probabilitatea evenimentului C care constă în realizarea lui A de k ori, atunci când E se efectuează de n ori este

$$P(C)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

unde $q=1-p$.
- Schema lui Bernoulli este un caz particular al schemei lui Poisson, când cele n experiențe E_i constau în repetarea (în aceleași condiții) experienței E, iar evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se reduc la același eveniment A, cu $P(A)=p$. Probabilitatea ca A să se realizeze de k ori când E se efectuează de n ori este coeficientul lui x^k din polinomul

$$Q(x)=(px+q)^n, \text{ deci } P(C)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

- Schema lui Bernoulli se mai numește **schema bilei revenite**, denumire justificată de următorul exemplu:
  O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se fac n extrageri, punând de fiecare dată bila extrasă în urnă. Probabilitatea evenimentului C care constă în obținerea a k bile albe și $n-k$ negre este

$$P(C)=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

- Exercițiu: O societate comercială are 5 debitori. Probabilitatea ca la sfârșitul unei luni un debitor să fie solvabil este $0,85$. Să se determine probabilitățile evenimentelor:
  a) A={toți debitorii sunt solvabili}
  b) B={toți debitorii nu sunt solvabili}
  c) C={trei debitori sunt solvabili}
  d) D={cel puțin trei debitori sunt solvabili}
  e) E={trei debitori nu sunt solvabili}
  f) F={cel mult doi debitori nu sunt solvabili}.

Schema lui Bernoulli cu mai multe stări (multinomială)

- Se consideră o experiență E în urma căreia poate apărea unul și numai unul din evenimentele $\{A_i\}$ cu probabilitățile $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,n}$ care formează un sistem complet de evenimente $\left(\sum_{i=1}^{n} p_i=1\right)$. Se repetă de k ori experiența E în aceleași condiții. Probabilitatea evenimentului A care constă în realizarea evenimentelor: A_1 de m_1 ori, A_2 de m_2 ori, $\ldots$, A_n de m_n ori $(m_1+m_2+\cdots+m_n=k)$ este

$$P(A)=\frac{k!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}.$$

- Exercițiu: La un magazin s-au vândut într-o lună 6 sortimente de produse c_i, $i=\overline{1,6}$ în procent de: 15%, 25%, 20%, 10%, 18% și respectiv 12%. Se consideră 50 de clienți ai magazinului și se anticipează solicitările acestora. Să se determine probabilitățile evenimentelor:
  a) A={5 clienți cumpără produsul c_1, 7 clienți cumpără produsul c_2, 12 clienți cumpără produsul c_3, 10 clienți cumpără produsul c_4, 11 clienți cumpără produsul c_5, 5 clienți cumpără produsul c_6}
  b) B={clienții nu cumpără produsele c_2 și c_3}.

Schema hipergeometrică (schema bilei neîntoarse)

- O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se fac n extrageri, fără a pune bila extrasă în urnă. Probabilitatea evenimentului A care constă în obținerea, din cele n bile extrase, a k bile albe și $n-k$ negre, este

$$P(A)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Numărul cazurilor posibile este C_{a+b}^n. Un grup de k bile albe poate fi luat în C_a^k moduri, iar un grup de $n-k$ bile negre poate fi luat în C_b^{n-k} moduri, deci numărul cazurilor favorabile este $C_a^k C_b^{n-k}$.
- Dintr-un lot de 100 produse, dintre care 5% sunt rebut, se iau la întâmplare 8 produse. Care este probabilitatea evenimentelor:
  a) A={6 produse sunt rebut}
  b) B={3 produse sunt rebut}
  c) C={3 sau 5 produse sunt rebut}
  d) D={cel puțin 2 produse sunt rebut}
  e) E={cel mult un produs este rebut}