Metode numerice și statistică

Curs 6

lect. Ciprian Deliu
✉ cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2019

Metoda lui Euler

Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x,y),\ x \in [a,b] \tag{1}$$

cu condiția inițială $y(x_0) = y_0,\ x_0 \in [a,b]$.

- Dacă se cere aproximarea soluției într-un punct $\bar{x}$ vecin cu x_0, atunci vom construi o rețea de puncte începând cu x_0 și terminând cu $\bar{x}$ și pe baza unei scheme de aproximare calculăm valorile soluției în aceste puncte.
- Considerăm o diviziune echidistantă a intervalului $[a,b]$:
$$x_k = a + k\cdot h,\ h = \frac{b-a}{n},\ k = 0,1,2,\dots,n$$
- Formula lui Taylor pentru soluția $y(x)$ în vecinătatea lui x_k:
$$y(x) = y(x_k) + (x-x_k)y'(x_k) + (x-x_k)^2\frac{y''(x_k)}{2!} + \dots$$
- Considerând doar primii doi termeni din dezvoltare și folosind (1) găsim
$$y(x) = y(x_k) + (x-x_k)f(x_k, y(x_k))$$
iar în punctele diviziunii avem
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k,y_k),\ k = 0,1,2,\dots,n.$$

Exemplu

Să se aproximeze soluția problemei Cauchy

$$y' = -2y + x + 0.5,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 1.$$

Considerăm $n = 5$, deci $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$, iar diviziunea este $x_k = a + k\cdot h = 0 + 0.2\cdot k$. Obținem:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1\\
y_1 &= y_0 + h(-2y_0 + x_0 + 0.5) = 1 + 0.2(-2+0.5) = 0.7\\
y_2 &= y_1 + h(-2y_1 + x_1 + 0.5) = 0.7 + 0.2(-1.4+0.2+0.5) = 0.56\\
y_3 &= y_2 + h(-2y_2 + x_2 + 0.5) = 0.56 + 0.2(-1.12+0.4+0.5) = 0.516\\
y_4 &= y_3 + h(-2y_3 + x_3 + 0.5) = 0.516 + 0.2(-1.032+0.6+0.5) = 0.5296\\
y_5 &= y_4 + h(-2y_4 + x_4 + 0.5) = 0.5296 + 0.2(-1.0592+0.8+0.5) = 0.5778
\end{aligned}$$

Soluția exactă a ecuației este $y(x) = e^{-2x} + 0.5x$, iar valorile acestea în punctele diviziunii sunt găsite cu ajutorul comenzilor MATLAB:

```
x=0:0.2:1
y=0.5*x+exp(-2*x)
```


MATLAB

```
function [x,y]=meuler(f,a,b,y0,n)
h=(b-a)/n;
x=zeros(1,n+1);
y=zeros(1,n+1);
x=a:h:b;
y(1)=y0;
for j=1:n
    y(j+1)=y(j)+h*feval(f,x(j),y(j));
end

function f=fxy(x,y)
f=-2*y+x+0.5;
```

- f = funcția $f(x,y)$ din ecuație
- $[a,b]$ - intervalul variabilei x
- $y0$ = valoarea din condiția inițială
- n = numărul punctelor diviziunii
- se definesc parametrii:
`a=0;b=1;y0=1;n=10;`
- Procedura se apelează cu sintaxa
`[x,y]=meuler('fxy',a,b,y0,n)`
- Soluția exactă în aceleași puncte:
`ye=0.5*x+exp(-2*x)`

1. $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x},\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 1,\ n = 10$
2. $y' = \sin x + e^{-x},\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ n = 10$
3. $y' = e^x - y^2,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ n = 10$
4. $y' = \left(\frac{2}{x}\right)\cdot y + x^2e^x,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 0,\ n = 10$

Metoda lui Euler îmbunătățită

Această metodă îmbunătățește aproximarea prin aplicarea metodei lui Euler cu pași intermediari:

Pas 1
$$\begin{aligned}
y_{1,1} &= y_0 + hf(x_0,y_0)\\
y_{1,2} &= y_0 + \frac{f(x_0,y_0) + f(x_1,y_{1,1})}{2}h\\
y_{1,3} &= y_0 + \frac{f(x_0,y_0) + f(x_1,y_{1,2})}{2}h\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pas k+1
$$\begin{aligned}
y_{k+1,1} &= y_k + hf(x_k,y_k)\\
y_{k+1,2} &= y_k + \frac{f(x_k,y_k) + f(x_{k+1},y_{k+1,1})}{2}h\\
&\vdots
\end{aligned}$$

În cadrul fiecărui pas șirul aproximantelor se va opri când se vor găsi două aproximante succesive care să aibă aceleași valori la numărul de zecimale cerute.

Exemplu

Să se aproximeze soluția următoarei probleme cu valori inițiale folosind metoda Euler îmbunătățită:

$$y'(x) = 2x + y,\ y(0) = 1.$$

Se va aproxima soluția în punctele $x = 0.2$ și $x = 0.4$ cu precizia $\varepsilon = 10^{-3}$.
Rezolvare: În cazul nostru avem $f(x,y) = 2x + y, x_0 = 0, y_0 = 1, f(x_0,y_0) = 1$. Alegem $h = 0.2$ și găsim:

Pasul 1
$$\begin{aligned}
&: y_{1,1} = y_0 + hf(x_0,y_0) = 1.2,\ f(x_1,y_{1,1}) = f(0.2,1.2) = 1.6\\
&y_{1,2} = y_0 + \tfrac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_{1,1})}{2}h = 1.26,\ f(x_1,y_{1,2}) = f(0.2,1.26) = 1.66\\
&y_{1,3} = y_0 + \tfrac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_{1,2})}{2}h = 1.266,\ f(x_1,y_{1,3}) = f(0.2,1.266) = 1.656\\
&y_{1,4} = y_0 + \tfrac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_{1,3})}{2}h = 1.2666,\ f(x_1,y_{1,4}) = f(0.2,1.2666) = 1.6666\\
&y_{1,5} = y_0 + \tfrac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_{1,4})}{2}h = 1.2666, \text{ deci } y(0.2) \simeq 1.266.
\end{aligned}$$

Pasul 2
$$\begin{aligned}
&: y_{2,1} = y_1 + hf(x_1,y_1) = 1.599,\ f(x_2,y_{2,1}) = f(0.4,1.599) = 2.399\\
&y_{2,2} = y_1 + \tfrac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_{2,1})}{2}h = 1.6725,\ f(x_2,y_{2,2}) = f(0.4,1.6725) = 2.4725\\
&y_{2,3} = y_1 + \tfrac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_{2,2})}{2}h = 1.6798,\ f(x_2,y_{2,3}) = f(0.4,1.6798) = 2.4798\\
&y_{2,4} = y_1 + \tfrac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_{2,3})}{2}h = 1.6806,\ f(x_2,y_{2,4}) = f(0.4,1.6806) = 2.4806\\
&y_{2,5} = y_1 + \tfrac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_{2,4})}{2}h = 1.6807, \text{ deci } y(0.4) \simeq 1.680.
\end{aligned}$$

Exemplu

Calculele anterioare pot fi organizate în următorul tabel:

x_i	$y_{i,j}$	$f(x_i,y_{i,j})$	$f(x_0,y_0)+f(x_i,y_{i,j})$	$(f(x_0,y_0)+f(x_i,y_{i,j}))\cdot h/2$
0	1	1		
0.2	1.2	1.6	2.6	0.26
	1.26	1.66	2.66	0.266
	1.266	1.666	2.666	0.2666
	1.2666	1.6666	2.6666	0.26666
	1.2666			
0.4	1.5992	2.3992	4.0652	0.4065
	1.6725	2.4725	4.1385	0.4138
	1.6798	2.4798	4.1458	0.4146
	1.6806	2.4806	4.1466	0.4147
	1.6807			

MATLAB

În Matlab există funcția **ode23** care implementează metoda Euler modificată. Funcția se apelează cu sintaxa

`[x,y]=ode23('fxy',xspan,y0)`

unde:

- fxy = numele unei funcții Matlab ce definește $f(x,y)$
- xspan = [x0,x1,...,xf] valoarea inițială a lui x și punctele intermediare în care cerem valorile aproximative ale soluției.
- Funcția returnează în x,y rețeaua de puncte și valorile aproximative ale soluției.

Exemplu: $2xyy' + x^2 - y^2 = 0,\ y(0.2) = 1,\ 0.2 \le x \le 1.$

Rescriem ecuația sub forma $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ și definim funcția Matlab

```
function f=fxy(x,y)
f=(y^2-x^2)/(2*x*y);
```

și o apelăm cu sintaxa

`[x,y]=ode23('fxy',0.2:0.1:1,1)`

Exerciții

Să se aproximeze soluția problemei cu valori inițiale, cu pasul dat, și să se reprezinte grafic:

1. $y' = \dfrac{e^{-2xy}}{1+x^2},\ y(0) = -0.5,\ 0 < x < 1,\ h = 0.1$
2. $y' = \sin(xy),\ y(0) = 1,\ 0 < x < 1,\ h = 0.1$
3. $y' = \sin\left(\dfrac{x-2y}{x-y}\right),\ y(0) = 0.5,\ 0 < x < 1,\ h = 0.1$
4. $y' = \dfrac{\ln xy}{1-xy},\ y(1) = 2,\ 1 < x < 2,\ h = 0.1$
5. $y' = 2y - x^2,\ y(0) = 0.25,\ 0 \le x \le 2,\ h = 0.1$
6. $y' = -y + \cos x,\ y(0) = 0.5,\ 0 \le x \le 2,\ h = 0.25$
7. $(y'+1)e^y = 1,\ y(0) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ h = 0.1$
8. $y' = \dfrac{y+1}{x},\ y(1) = 0,\ 1 \le x \le 2,\ h = 0.2$

Metoda Runge-Kutta

Metoda folosește mărimi intermediare atunci când se trece de la aproximarea soluției y_n în x_n la aproximarea soluției y_{n+1} în x_{n+1}. Formulele de calcul pentru aceste mărimi intermediare sunt:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} ; \; y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Exemplu: Să se aproximeze soluția problemei Cauchy

$$y' = 2xy, \; 0 \le x \le 0.5, \; y(0) = 1.$$

n	x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	$1/6 \sum k_i$
0	0	1	0	0.01	0.01005	0.020201	0.0100502
1	0.1	1.0100502	0.0202010	0.0306045	0.0307606	0.0416324	0.0307606
2	0.2	1.0408108	0.0416324	0.0530813	0.0533676	0.0656507	0.0533635
3	0.3	1.09417	0.0656504	0.07889	0.0793533	0.0938822	0.0793365
4	0.4	1.17351	0.0938809	0.109841	0.110559	0.128407	0.110514
5	0.5	1.28403					

MATLAB

```
function [x,y]=mrunkt(f,a,b,y0,m)
h=(b-a)/m;
x=zeros(1,m+1);
y=zeros(1,m+1);
x=a:h:b;
y(1)=y0;
for j=1:m
    k1=h*feval(f,x(j),y(j));
    k2=h*feval(f,x(j)+h/2,y(j)+k1/2);
    k3=h*feval(f,x(j)+h/2,y(j)+k2/2);
    k4=h*feval(f,x(j)+h,y(j)+k3);
    y(j+1)=y(j)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end

function f=fxy(x,y)
f=2*x.*y;
```

- f = funcția $f(x,y)$ din ecuație
- $[a,b]$ - intervalul variabilei x
- $y0$ = valoarea din condiția inițială
- m = numărul punctelor diviziunii
- se definesc parametrii: `a=0;b=0.5;y0=1;m=5;`
- Procedura se apelează cu sintaxa `[x,y]=mrunkt('fxy',a,b,y0,m)`
- Soluția exactă în aceleași puncte: `ye=exp(x.^2)`

1. $y' = \frac{1}{x+y^2}, \; 1 \le x \le 2, \; y(1) = 1, \; m = 10$
2. $y' = \frac{xy}{2+\cos y}, \; 0 \le x \le 1, \; y(0) = 1, \; m = 10$
3. $y' = 3x + e^{-y}, \; 0 \le x \le 1, \; y(0) = 0, \; m = 10$
4. $y' = x + e^{x-y}, \; 0 \le x \le 1, \; y(0) = 1, \; m = 10$

Metoda lui Adams

- Metodele precedente (Euler și Runge-Kutta) sunt metode cu pași separați (adică folosesc pentru aproximarea soluției într-un punct x_k doar informațiile din punctul precedent x_{k-1}).
- Metoda lui Adams este o metodă cu pași legați, adică pentru aproximarea soluției într-un punct x_k se folosesc informații din mai mulți pași precedenți x_{k-1}, x_{k-2}, etc. Metodele cu pași legați scurtează timpul de lucru pentru aproximarea unei soluții.
- Presupunem că se cunosc $y_0, y_1, \ldots, y_n$ și determinăm y_{n+1}, valoarea aproximativă a soluției în x_{n+1}, cu ajutorul formulei lui Adams:
$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{n-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 f_{n-4} + \ldots\right]$$
unde $f_i = f(x_i, y_i), \; i = 0, 1, \ldots, n$ iar Δf_{n-1}, $\Delta^2 f_{n-2}, \ldots$ sunt diferențele finite corespunzătoare acestor valori.
- Cazuri particulare:
$k = 1: \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$
$k = 2: \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$
$k = 3: \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

MATLAB

```
function A=madams(f,X,Y)
n=length(X);
if n<5,return,end;
F=zeros(1,4);
F=feval(f,X(1:4),Y(1:4));
h=X(2)-X(1);
for k=4:n-1
 Y(k+1)=Y(k)+(h/24)*(F*[-9 37 -59 55]');
 X(k+1)=X(1)+h*k;
end
A=[X' Y'];
```

- $X = [x0, x1, \ldots, xn]$ rețeaua de puncte
- $Y = [y0, y1, y2, y3]$ primele aproximări ale soluției;
- **fxy** este numele fișierului ce definește funcția $f(x,y)$;
- Funcția se apelează cu sintaxa
`A=madams('fxy',X,Y)`
și returnează în matricea A coloanele X și Y cu valorile și aproximările pe rețeaua dată

Exemplu: Să se aplice metoda lui Adams pentru aproximarea soluției problemei cu valorile inițiale $y' = 2xy, \quad y(0) = 1$ în punctul $x = 0.6$ știind că

$$y(0.3) = 1.0941743, \; y(0.4) = 1.1735108, \; y(0.5) = 1.2840252.$$

Rezolvare: $h = 0.1, \; k = 2, \; f(x,y) = 2xy$. Prin Metoda lui Adams găsim

$$y(0.6) \simeq \frac{0.1}{12}\left(23f(0.5, y(0.5)) - 16f(0.4, y(0.4)) + 5f(0.3, y(0.3))\right) = 0.1482847$$