Metode numerice și statistică
Curs 5

lect. Ciprian Deliu
cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2019

Diferențe divizate

- Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și rețeaua de noduri $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ neechidistante în care se cunosc valorile funcției $y_k=f(x_k), k=0,1,\ldots,n$. Expresia

$$f(x_k,x_{k+1})=[x_k,x_{k+1}]=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

se numește **diferență divizată** de ordinul întâi a funcției f.
- Diferențele divizate de ordinul al doilea se definesc astfel:

$$f(x_k,x_{k+1},x_{k+2})=[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]=\frac{[x_{k+1},x_{k+2}]-[x_k,x_{k+1}]}{x_{k+2}-x_k}$$

- Diferențele divizate ale funcției f pot fi aranjate într-un tabel de forma

x_k	$y_k=f(x_k)$	$[x_k,x_{k+1}]$	$[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$
x_0	y_0			
		$[x_0,x_1]$		
x_1	y_1		$[x_0,x_1,x_2]$	
		$[x_1,x_2]$		$[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	y_2		$[x_1,x_2,x_3]$	
		$[x_2,x_3]$		
x_3	y_3			

Definiție

Polinomul $P_n(x)=y_0+[x_0,x_1](x-x_0)+[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ *se numește* **polinomul de interpolare al lui Newton cu diferențe divizate**.

Exemplu: Fie funcția $f(x)=\sin(\pi x)$ și nodurile de interpolare $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$. Să se construiască un polinom de interpolare de gradul al doilea.
Rezolvare: Construim tabelul cu diferențe divizate:

k	x_k	$y_k=f(x_k)$	$[x_k,x_{k+1}]$	$[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$
0	0	0		
			$\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{6}-0}=3$	
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{1}{2}-0}=-3$
			$\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=\frac{3}{2}$	
2	$\frac{1}{2}$	1		

Se obține polinomul cu diferențe divizate

$$P_2(x)=0+3(x-0)+(-3)(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{2}x-3x^2$$

MATLAB

```
function [C,D,Yi]=mdiviz(X,Y,Xi)
n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';
for j=2:n
 for k=j:n
  D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
 end
end
C=D(n,n);
for k=(n-1):-1:1
 C=conv(C,poly(X(k)));
 m=length(C);
 C(m)=C(m)+D(k,k);
end
Yi=polyval(C,Xi);
```

- $X=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ rețeaua de noduri;
- $Y=[y_0,y_1,\ldots,y_n]$ valorile funcției în nodurile rețelei;
- $Xi=[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r]$ valorile în care dorim aproximarea funcției;
- Funcția se apelează cu sintaxa

```
[C,D,Yi]=mdiviz(X,Y,Xi)
```

și va returna în C o matrice linie cu coeficienții polinomului, în D diferențele divizate, iar în Yi valorile funcției în punctele din Xi.

Integrarea numerică a funcțiilor

- Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și integrala $I=\int_a^b f(x)dx$.
- Dacă $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$, atunci I este aria domeniului plan D delimitat de axa Ox, graficul funcției f și dreptele $x=a$ și $x=b$.
- Considerăm o rețea de puncte

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

echidistante cu pasul $h=\frac{b-a}{n}$, deci

$$x_i=a+ih,\ i=0,1,2,\ldots,n.$$

- Ducem prin fiecare x_k paralele la Oy și obținem subdomeniile $D_0,D_1,\ldots,D_{n-1}$ și avem:

$$\mathcal{A}(D)=\mathcal{A}(D_0)+\mathcal{A}(D_1)+\cdots+\mathcal{A}(D_{n-1})$$

- Dacă n este foarte mare și fiecare arie este calculată cu eroare cât mai mică, se obține o aproximare pentru integrala I.

Metoda dreptunghiurilor

- Pentru o rețea de puncte echidistante notăm cu $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\ldots y_n=f(x_n)$ valorile funcției f în punctele rețelei
- Pe fiecare interval $[x_k,x_{k+1}]$ aproximăm funcția $f(x)$ cu y_k, respectiv y_{k+1}
- Se obține o aproximare a ariei domeniului D_k cu $y_k h$, respectiv $y_{k+1}h$
- Se obțin aproximările

$$\int_a^b f(x)dx=\mathcal{A}(D)\simeq h(y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}) \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\mathcal{A}(D)\simeq h(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n) \qquad (2)$$

- Eroarea

$$|I-\mathcal{A}(D)|<\frac{(b-a)^2}{n}M,\ \text{unde } M=\sup\{|f'(x)|;x\in[a,b]\}$$

Exemplu

Să se aproximeze $\int_0^1 \frac{1}{1+3x}dx$ folosind metoda dreptunghiurilor.
Avem $a=0,\ b=1,\ n=4,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{4}=0.25$

$$\begin{aligned}
x_0 &= a=0\Rightarrow y_0=f(0)=1\\
x_1 &= a+h=0.25\Rightarrow y_1=f(0.25)=0.5714\\
x_2 &= a+2h=0.5\Rightarrow y_2=f(0.5)=0.4\\
x_3 &= a+3h=0.75\Rightarrow y_3=f(0.75)=0.3077\\
x_4 &= a+4h=b=1\Rightarrow y_4=f(1)=0.25
\end{aligned}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+3x}dx\simeq h(y_0+y_1+y_2+y_3)=0.569775$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+3x}dx\simeq h(y_1+y_2+y_3+y_4)=0.382275$$

Valoarea exactă este $\int_0^1\frac{1}{1+3x}dx=\frac{1}{3}\ln(1+3x)\Big|_0^1=0.4621$

Metoda trapezelor

- Considerăm din nou o rețea echidistantă, domeniile D_k și notăm punctele de pe graficul funcției f corespunzătoare rețelei alese cu $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, $\ldots M_n(x_n,y_n)$.
- Aproximăm aria domeniului D_k prin aria trapezului determinat de punctele M_k, M_{k+1} și punctele de pe Ox corespunzătoare lui x_k și x_{k+1}:

$$\mathcal{A}(D_k)\simeq\frac{h(y_k+y_{k+1})}{2}$$

- Se obține aproximarea

$$\int_a^b f(x)dx=\mathcal{A}(D)\simeq\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n) \quad (3)$$

- Eroarea

$$|I-\mathcal{A}(D)|<\frac{(b-a)^3}{12n^2}M,\ \text{unde } M=\sup\{|f''(x)|;x\in[a,b]\}$$

Exemplu

Să se aproximeze $\int_0^1\frac{1}{1+3x}dx$ folosind metoda trapezelor.

Avem $a=0,\ b=1,\ n=4,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{4}=0.25$

$$\begin{aligned}
x_0 &= a=0\Rightarrow y_0=f(0)=1\\
x_1 &= a+h=0.25\Rightarrow y_1=f(0.25)=0.5714\\
x_2 &= a+2h=0.5\Rightarrow y_2=f(0.5)=0.4\\
x_3 &= a+3h=0.75\Rightarrow y_3=f(0.75)=0.3077\\
x_4 &= a+4h=b=1\Rightarrow y_4=f(1)=0.25
\end{aligned}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+3x}dx\simeq\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)=0.476$$

Metoda parabolelor (Simpson)

- Considerăm o rețea echidistantă cu un număr par de noduri $n = 2m$ și punctele de pe graficul funcției f corespunzătoare rețelei alese $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $\ldots M_n(x_n, y_n)$.
- Pe fiecare interval $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ aproximăm funcția f cu o funcție de gradul 2 al cărei grafic trece prin punctele $M_{2k}, M_{2k+1}, M_{2k+2}$. Avem:

$$\mathcal{A}(D_k) \simeq \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$$

- Se obține aproximarea

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}) \tag{4}$$

- Eroarea

$$|I - \mathcal{A}(D)| < \frac{(b-a)^5}{180n^4}M, \text{ unde } M = \sup\{|f^{(4)}(x)|; x \in [a,b]\}$$

Exemplu

Să se aproximeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+3x}dx$ folosind metoda lui Simpson.

Avem $a = 0,\ b = 1,\ n = 4,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

$$\begin{aligned}
x_0 &= a = 0 \Rightarrow y_0 = f(0) = 1\\
x_1 &= a + h = 0.25 \Rightarrow y_1 = f(0.25) = 0.5714\\
x_2 &= a + 2h = 0.5 \Rightarrow y_2 = f(0.5) = 0.4\\
x_3 &= a + 3h = 0.75 \Rightarrow y_3 = f(0.75) = 0.3077\\
x_4 &= a + 4h = b = 1 \Rightarrow y_4 = f(1) = 0.25
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3x}dx \simeq \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 0.4639$$

MATLAB

```
function s=msimps(f,a,b,m)
h=(b-a)/(2*m);
s1=0;
s2=0;
for k=1:m
    x=a+h*(2*k-1);
    s1=s1+feval(f,x);
end
for k=1:(m-1)
    x=a+h*2*k;
    s2=s2+feval(f,x);
end
s=h*(feval(f,a)+feval(f,b)+4*s1+2*s2)/3;
```

- Funcția se apelează cu sintaxa

  `s=msimps('fx',a,b,m)`

- **fx** este un fișier care conține funcția $f(x)$
- a, b sunt extremitățile intervalului pe care se integrează
- m este ales astfel încât $n = 2m$.

Formulele de cuadratură Newton-Cotes

- Considerăm rețeaua de noduri echidistante $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, notăm $h = \frac{b-a}{n}$ și avem $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$ și $y_i = f(x_i)$ valorile funcției în aceste noduri.
- Aproximând funcția f prin polinomul Lagrange $L_n(x)$ asociat rețelei date, se obține **formula de aproximare Newton-Cotes**

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\sum_{i=0}^n H_i y_i$$

unde $H_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq$, iar $q = \frac{x-x_0}{h}$, $q^{[n+1]} = q(q-1)\ldots(q-n)$.

- Una din cele mai folosite formule de cuadratură numerică de acest tip este cea obținută pentru $n = 3$, numită și **formula lui Simpson 3/8**:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

- Eroarea de aproximare este mai mică decât

$$\frac{(b-a)^5}{80n^4}M, \text{ unde } M = \sup\{|f^{(4)}(x)|; x \in [a,b]\}$$

Exemplu

Să se aproximeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+3x}dx$ folosind formula lui Newton.

Avem $a = 0,\ b = 1,\ n = 3,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
x_0 &= a = 0 \Rightarrow y_0 = f(0) = 1\\
x_1 &= a + h = \frac{1}{3} \Rightarrow y_1 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\\
x_2 &= a + 2h = \frac{2}{3} \Rightarrow y_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\\
x_3 &= a + 3h = 1 \Rightarrow y_3 = f(1) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3x}dx \simeq \frac{1}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) = 0.46875$$