Metode numerice și statistică

Curs 4

lect. Ciprian Deliu
cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2020

Metoda celor mai mici pătrate

- În multe cazuri din practică o funcție este dată tabelar printr-o mulțime de valori obținute prin măsurători și se dorește determinarea valorilor funcției în puncte unde nu putem face măsurători.

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

- Aproximăm funcția cu un polinom

$$p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

astfel încât funcția abatere pătratică

$$\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - p(x_k))^2$$

să fie minimă.

- Se demonstrează că soluțiile sistemului obținut prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale ale funcției φ fac pozitivă diferențiala de ordinul 2 $d^2\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Exemplu

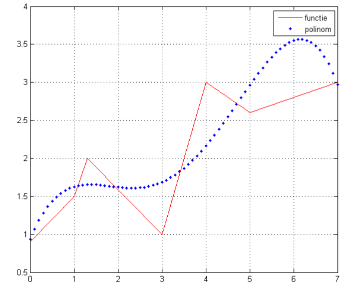
Fie o funcție având valori date în tabelul:

x	0	1	1.3	3	4	5	7
y	0.9	1.5	2	1	3	2.6	3

MATLAB:

```
clear;clc;
X=[0,1,1.3,3,4,5,7];
Y=[0.9,1.5,2,1,3,2.6,3];
c=polyfit(X,Y,4);
t=min(X):0.1:max(X);
Z=polyval(c,t);
plot(X,Y,'r-',t,Z,'b.');
grid;
legend('functie','polinom');
ab=sum((polyval(c,X)-Y).^2)

x=2;u=polyval(c,x)
```



Exerciții

Să se aproximeze funcțiile următoare, date tabelat, folosind polinoame de gradul indicat și să se aproximeze funcția în punctele indicate:

1.

x	2.3	2.5	3	3.6	3.8	4
$y = f(x)$	1.2	1.7	1.3	1.8	1.9	2

polinom de grad 1,2,3 și 7; aproximare funcție în 3.4 și 3.9

2.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	2.45	2.65	2.8	3	2.5	2.2	2.8	3

polinom de grad 1,2,3 și 10; aproximare funcție în 0.5, 3.5 și 5.6

3.

x	-2	-1.5	-1	0	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	3.00	3.36	3.86	4	3.50	3.25	3.00	3.70	3.80	4

polinom de grad 1,2 și 8; aproximare funcție în -1.7, 1.9, 2.6 și 3.7

Interpolare

Considerăm din nou o funcție necunoscută cu valori date tabelar

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Prin interpolare se înțelege o metodă de determinare a unei funcții $\varphi(x)$ care să aproximeze cât mai bine funcția necunoscută f și care să îndeplinească condițiile

$$\varphi(x_k) = y_k, \ \forall k = 0, 1, \dots, n$$

numite și *condiții de interpolare*.
Considerăm funcția polinomială

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n.$$

Condițiile de interpolare devin

$$c_0 + c_1 x_k + \dots + c_n x_k^n = y_k, \ k = 0, 1, \dots, n$$

adică un sistem cu $n+1$ ecuații în necunoscutele $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Diferențe finite

- Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție dată și Δx o creștere a argumentului x, notată uneori și cu h. Expresia
$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$
este numită **diferență finită** de primul ordin al funcției f. Se pot defini în mod asemănător diferențele finite de ordin superior:
$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \ n = 2, 3, \dots$$
- Exemplu: $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+\Delta x) - f(x)) =$
$= \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = (f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)) - (f(x + \Delta x) - f(x)) =$
$= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$.
- În cazul unei rețele echidistante $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ din intervalul $[a,b]$ având pasul h, așadar $x_i = x_0 + i \cdot h$, notăm cu $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \dots,$ $y_n = f(x_n)$ valorile cunoscute ale funcției f în aceste puncte. Diferențele finite ale funcției în aceste puncte pot fi aranjate într-un tabel astfel:

x_i	y_i	$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$	$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$	$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
x_3	y_3			

Polinomul de interpolare al lui Newton

- Căutăm un polinom de grad n de forma
$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$
în care coeficienții $c_0, c_1, \dots, c_n$ sunt necunoscuți.
- Punând condițiile de interpolare $y_i = P_n(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n$ se obține un sistem de ecuații liniare în necunoscutele $c_i, i = 0, 1, \dots, n$.
- Înlocuind soluțiile acestui sistem în polinomul $P_n(x)$ se obține **polinomul de interpolare al lui Newton de prima speță**
$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$
unde $q = \frac{x - x_0}{h}$.
- $f(\bar{x}) \simeq P_n(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in [a,b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
- Acest polinom este convenabil de folosit pentru interpolarea unei funcții în partea de început a tabelului de valori
- Eroarea de aproximare este mai mică decât $\left|\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} y_0\right|$.

Exemplu

Pentru funcția dată prin tabelul următor se cere aproximarea funcției în punctul $\bar{x} = 1.9$:

x	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3
$y = f(x)$	2	1.8	1.5	1.8	1.9	2

Construim tabelul cu diferențe finite:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1	2	-0.2	-0.1	0.7	-1.5	2.5
1.4	1.8	-0.3	0.6	-0.8	1.0	
1.8	1.5	0.3	-0.2	0.2		
2.2	1.8	0.1	0			
2.6	1.9	0.1				
3	2					

$$q = \frac{\bar{x} - x_0}{h} = \frac{1.9 - 1}{0.4} = 2.25$$

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\Delta^5 y_0 \simeq 1.5436$$

- Dacă se caută un polinom de grad n de forma
$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_n) + c_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + c_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1),$$
punând aceleași condiții de interpolare $y_k = P_n(x_k), \forall k = n, n-1, \dots, 1, 0,$ se obține **polinomul de interpolare al lui Newton de speța a doua**:
$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$
unde $q = \frac{x - x_n}{h}$.
- $f(\bar{x}) \simeq P_n(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in [a,b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
- Acest polinom este convenabil de folosit pentru interpolarea unei funcții în partea finală a tabelului de valori
- Eroarea de aproximare este mai mică decât $\left|\frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1} y_0\right|$.
- Diferențele finite $\Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \dots, \Delta^n y_0$ se găsesc pe diagonala secundară a tabelului cu diferențe finite parcursă de jos în sus.

MATLAB

```
clear;clc;
N=6;
xmin=1;xmax=3;
h=(xmax-xmin)/(N-1);
X=linspace(xmin,xmax,N);
Y=[2,1.8,1.5,1.8,1.9,2];
x=1.9;
q=(x-X(1))/h;
for k=1:N
    D(k,1)=Y(k);
end
for j=2:N
    for k=1:N-j+1
        D(k,j)=D(k+1,j-1)-D(k,j-1);
    end
end
P=D(1,1)+D(1,2)*q+D(1,3)*q*(q-1)/2+D(1,4)*q*(q-1)*(q-2)/6+...
    D(1,5)*q*(q-1)*(q-2)*(q-3)/24+D(1,6)*q*(q-1)*(q-2)*(q-3)*(q-4)/120
```


Exerciții

1. Să se scrie polinomul lui Newton corespunzător funcțiilor date prin următoarele tabele și să se aproximeze funcțiile în punctele indicate:

   a)

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	1.8	3.5	6	11	22

   aproximare în -0.4 și 2.7

   b)

x	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	3.65	1.85	1.25	0.94	0.75

   aproximare în 1.6 și 4.8

   c)

x	4	5	6	7	8
$y = f(x)$	2.1	2.2111	2.5544	2.6457	2.8585

   aproximare în 4.5 și 7.8

2. Considerați o funcție cunoscută. Alegeți un interval, o rețea de puncte și o valoare a lui x în care cunoașteți valoarea exactă a funcției. Aproximați valoarea funcției cu polinoamele date. Comparați rezultatele.

Polinomul de interpolare al lui Lagrange

- Considerăm o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o rețea de noduri oarecare $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ și valorile funcției în aceste noduri $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$.
- **Polinomul lui Lagrange** este o combinație liniară de $n + 1$ polinoame de grad n:
$$L_n(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + \cdots + y_n\varphi_n(x)$$
unde $\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- Dacă funcția f admite derivate continue până la ordinul $n + 1$, atunci eroarea într-un punct x diferit de punctele de interpolare este:
$$|E_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0)\ldots(x - x_n)|$$
unde $M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$.
- Polinomul lui Lagrange poate fi rescris sub forma
$$L_n(x) = \Pi(x)\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}$$
unde $D_i = (x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$ și $\Pi(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$.

Exemplu

Pentru funcția dată prin tabelul următor se cere aproximarea funcției în $x = 9$ și $x = 6$:

x_i	1	3	4	5	7	8	10	11
y_i	0.9512	0.8607	0.8187	0.7788	0.7047	0.6703	0.6065	0.5769

Organizăm calculele în următorul tabel:

i	x_i	D_{i0}	D_{i1}	D_{i2}	D_{i3}	D_{i4}	D_{i5}	D_{i6}	D_{i7}	y_i	$\frac{y_i}{D_i}$
0	1	**8**	−2	−3	−4	−6	−7	−9	−10	0.9512	$-1.31 \cdot 10^{-6}$
1	3	2	**6**	−1	−2	−4	−5	−7	−8	0.8607	$3.2 \cdot 10^{-5}$
2	4	3	1	**5**	−1	−3	−4	−6	−7	0.8187	$-1.08 \cdot 10^{-4}$
3	5	4	2	1	**4**	−2	−3	−5	−6	0.7788	$1.35 \cdot 10^{-4}$
4	7	6	4	3	2	**2**	−1	−3	−4	0.7047	$-2.04 \cdot 10^{-4}$
5	8	7	5	4	3	1	**1**	−2	−3	0.6703	$2.66 \cdot 10^{-4}$
6	10	9	7	6	5	3	2	**-1**	−1	0.6065	$5.35 \cdot 10^{-5}$
7	11	10	8	7	6	4	3	1	**-2**	0.5769	$-7.15 \cdot 10^{-6}$

De pe diagonala principală se obține $\Pi(9) = (9 - x_0)\ldots(9 - x_7) = 3840$.

De pe ultima coloană se obține $\sum \frac{y_i}{D_i} = 1.66 \cdot 10^{-4}$.

Valoarea aproximativă a funcției în $x = 9$ este

$$f(9) \simeq L_7(9) = \Pi(9)\sum \frac{y_i}{D_i} = 0.6376$$

MATLAB

```
function [C,L,Yi]=mlagrang(X,Y,Xi)
m=length(X);
n=m-1;
L=zeros(m,m);
for k=1:n+1
 V=1;
 for j=1:n+1
  if k~=j
   V=conv(V,poly(X(j)))/(X(k)-X(j));
  end
 end
 L(k,:)=V;
end
C=Y*L;
Yi=polyval(C,Xi);
```

- $X = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ rețeaua de noduri;
- $Y = [y_0, y_1, \ldots, y_n]$ valorile funcției în nodurile rețelei;
- $Xi = [\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r]$ valorile în care dorim aproximarea funcției;
- Funcția se apelează cu sintaxa

  `[C,L,Yi]=mlagrang(X,Y,Xi)`

  și va returna în C o matrice linie cu coeficienții polinomului Lagrange, în L o matrice de lucru, iar în Yi valorile funcției în punctele din Xi.

Exerciții

Folosind polinomul de interpolare al lui Lagrange să se aproximeze valorile următoarelor funcții în punctele menționate:

1.

x_i	2	3	3.5	5	6	7.5	9
$y_i = f(x_i)$	-6	8	-4	3	-7	10	13

în 2.4, 2.8, 4 și 7;

2.

x_i	-3	-1.5	-0.5	1	1.5
$y_i = f(x_i)$	5	6	7	4	9

în -2, -1 și 0;

3.

x_i	2	3.5	6	8	9.6	12	14
$y_i = f(x_i)$	1.42	1.87	2.45	2.83	3.12	3.41	3.74

în 6.5, 7 și 8.9;

4.

x_i	0	0.5	1.2	1.8	1.9	2
$y_i = f(x_i)$	3.12	4	4.5	4.12	4.05	4

în 1 și 1.5;