Metode numerice și statistică

Curs 3

lect. Ciprian Deliu
cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2020

Metoda iterativă a lui Jacobi

- Se rescrie sistemul $AX = B$ sub forma $\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$.
- Procedeul iterativ al lui Jacobi este dat prin relațiile:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

  unde valoarea inițială $x^{(0)}$ se poate lua coloana termenilor liberi B.
- Condiție de convergență:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \forall i = \overline{1,n} \text{ sau } \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \forall j = \overline{1,n}$$

- Criteriu de oprire: $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon$

MATLAB

```
function X=mjacobi(A,B,X0,tol,max1)
N=length(B);
for k=1:max1
    for j=1:N
        X(j)=(B(j)-A(j,[1:j-1,j+1:N])*...
            X0([1:j-1,j+1:N]))/A(j,j);
    end
    err=abs(norm(X'-X0));
    relerr=err/(norm(X)+eps);
    X0=X';
    if (err<tol)|(relerr<tol)
        break
    end
end
X=X';
```

- $X0$ = aproximația inițială
- tol $= \varepsilon$ (eroarea)
- max1 = numărul maxim de iterații
- se definesc parametrii:

```
A=[3 1 1;-1 5 2;0 3 9]
B=[1;2;3]
X0=B
tol=0.0001
max1=20
```

- Procedura se apelează cu sintaxa

```
X=mjacobi(A,B,X0,tol,max1)
```


Metoda Gauss-Seidel

Este o variantă a metodei lui Jacobi în care procedeul iterativ este dat prin:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemplu: $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3 \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 \end{cases}$

Inițializăm cu $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ și avem iterațiile:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} = 1.2 \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2x_1^{(1)} - 0.1x_3^{(0)} = 1.06 \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2x_1^{(1)} - 0.2x_2^{(1)} = 0.948 \end{cases}, \begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1x_2^{(1)} - 0.1x_3^{(1)} = 0.9992 \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2x_1^{(2)} - 0.1x_3^{(1)} = 1.00536 \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2x_1^{(2)} - 0.2x_2^{(2)} = 0.99908 \end{cases}$$

care converg către soluția $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

MATLAB

```
function X=mgseidel(A,B,X0,tol,max1)
N=length(B);
for k=1:max1
    for j=1:N
        if j==1
            X(1)=(B(1)-A(1,2:N)*X0(2:N))/A(1,1);
        elseif j==N
            X(N)=(B(N)-A(N,1:N-1)*(X(1:N-1))')/A(N,N);
        else
        X(j)=(B(j)-A(j,1:j-1)*(X(1:j-1))'-A(j,j+1:N)*X0(j+1:N))/A(j,j);
        end
    end
    err=abs(norm(X'-X0));
    relerr=err/(norm(X)+eps);
    X0=X';
    if (err<tol)|(relerr<tol)
        break
    end
end
X=X';

X=mgseidel(A,B,X0,tol,max1)
```


Exerciții

Să se aproximeze soluția sistemelor de ecuații $AX = B$ cu ajutorul metodelor iterative ale lui Jacobi și Gauss-Seidel pentru:

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -3 & -1 \\ 4 & 13 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 9 & -2 \\ 3 & -5 & 4 & 14 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Metoda aproximațiilor succesive

- Considerăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

  care poate fi pus sub forma $\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$
- Pentru aproximarea soluției sistemului se consideră următorul procedeu iterativ:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = g_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = g_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \end{cases}$$

- Condiții de convergență: $\exists \lambda > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right| \leq \lambda < 1, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in D, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplu

Să se aproximeze soluția sistemului

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos(yz) + \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{9}\sqrt{x^2 + \sin z + 1.06} - 0.1 \\ z = -\frac{1}{20}e^{-xy} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{cases} \qquad -1 \leq x, y, z \leq 1$$

Rezolvare:Introducem notațiile

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = \frac{1}{3}\cos(yz) + \frac{1}{6} \\ g_2(x, y, z) = \frac{1}{9}\sqrt{x^2 + \sin z + 1.06} - 0.1 \\ g_3(x, y, z) = -\frac{1}{20}e^{-xy} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{cases}$$

Verificăm condițiile de convergență

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial z}\right| = |0| + \left|-\frac{z}{3}\sin(yz)\right| + \left|-\frac{y}{3}\sin(yz)\right| \leq \frac{2}{3} = \lambda < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial z}\right| = \left|\frac{x}{9\sqrt{x^2 + \sin z + 1.06}}\right| + |0| + \left|\frac{\cos z}{18\sqrt{x^2 + \sin z + 1.06}}\right| \leq \frac{2}{9} < \lambda < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial z}\right| = \left|\frac{y}{20}e^{-xy}\right| + \left|\frac{x}{20}e^{-xy}\right| + |0| \leq \frac{e}{10} < \lambda < 1$$

Procedeul iterativ se scrie sub forma

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{3}\cos(y^{(k)}z^{(k)}) + \frac{1}{6} \\ y^{(k+1)} = \frac{1}{9}\sqrt{(x^{(k)})^2 + \sin z^{(k)} + 1.06} - 0.1 \\ z^{(k+1)} = -\frac{1}{20}e^{-x^{(k)}y^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{cases}$$

Inițializăm cu $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = (0.1, 0.1, -0.1)$ și trecem rezultatele într-un tabel de forma

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
1	0.49998	0.00944	-0.5231
2	0.49999	0.00002	-0.52336
3	0.5	0.00001	-0.52359
4	0.5	0	-0.52359

Soluția aproximativă va fi

$$x \simeq 0.5, \ y \simeq 0, \ z \simeq -0.52359$$

MATLAB

```
function [P,iter]=mseidel(G,P,delta,max1)
% G este sistemul scris intr-un fisier function
% P=[x0,y0,z0,...] valorile initiale
% delta este eroarea de aproximare
% max1 este numarul maxim de iteratii
N=length(P);
for k=1:max1
    X=P;
    for j=1:N
        A=feval(G,X);
        X(j)=A(j);
    end
    err=abs(norm(X-P));
    relerr=err/(norm(X)+eps);
    P=X;
    iter=k;
    if (err<delta)|(relerr<delta)
        break
    end
end
```

- Procedura se apelează cu sintaxa
  `[P,iter]=mseidel('fun',P,delta,max1)`
- Fișierul funcție numit **fun** se va scrie astfel:

```
function w=fun(x)
w=zeros(n,1);
% n = numarul de ecuatii
w(1)=g1(x(1),x(2),...,x(n));
w(2)=g2(x(1),x(2),...,x(n));
...
w(n)=gn(x(1),x(2),...,x(n));
```


Exerciții

Să se aproximeze soluțiile următoarelor sisteme cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$:

1. $\begin{cases} x = \frac{7.17+3y^2+4z}{12} \\ y = \frac{11.54+z-x^2}{10} \\ z = \frac{7.631-y^3}{7} \end{cases}$, $0 \le x, y, z \le 1.4$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right) = (0,0,0)$;
2. $\begin{cases} x = 1-\cos(xyz) \\ y = 1-(1-x)^{1/4} - 0.05z^2 + 0.15z \\ z = x^2 + 0.1y^2 - 0.01y + 1 \end{cases}$, $\begin{cases} -0.1 \le x \le 0.1 \\ -0.2 \le y \le 0.4 \\ 0.5 \le z \le 1.5 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right) = (0,0,0)$
3. $\begin{cases} x = \frac{6.81+3y+4z^2}{24} \\ y = \frac{1.24+2z-x^2}{18} \\ z = \frac{1.48+y^2}{14} \end{cases}$, $0 \le x, y, z \le 1$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right) = (0,0,0)$;
4. $\begin{cases} 10x = y^3 + 6.81 \\ 18y = 1.24 - x^2 \end{cases}$, $0 \le x, y \le 1$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (0,0)$;

Metoda Newton-Raphson

Considerăm sistemul de ecuații $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$, unde funcțiile $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfac condiții de diferențiabilitate până la un ordin necesar pentru a construi un procedeu iterativ.
Dezvoltăm după formula lui Taylor funcțiile f_1, f_2 în vecinătatea unui punct $\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \in D$:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = f_1\left(x^{(k)},y^{(k)}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(x-x^{(k)}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(y-y^{(k)}\right) + \dots \\ f_2(x,y) = f_2\left(x^{(k)},y^{(k)}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(x-x^{(k)}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(y-y^{(k)}\right) + \dots \end{cases}$$

așadar soluția sistemului inițial este aproximativ egală cu cea a sistemului

$$\begin{cases} 0 = f_1\left(x^{(k)},y^{(k)}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(x-x^{(k)}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(y-y^{(k)}\right) \\ 0 = f_2\left(x^{(k)},y^{(k)}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(x-x^{(k)}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\left(y-y^{(k)}\right) \end{cases}$$

care poate fi rescris sub forma matriceală

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)} \cdot \begin{pmatrix} x-x^{(k)} \\ y-y^{(k)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_1\left(x^{(k)},y^{(k)}\right) \\ f_2\left(x^{(k)},y^{(k)}\right) \end{pmatrix}$$

Dacă notăm cu $\left(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}\right)$ soluția (x,y) a acestui sistem obținem un procedeu iterativ, criteriul de oprire fiind atunci când distanța dintre două aproximante succesive este suficient de mică, sau când un număr maxim de iterații este atins.

Exemplu

Să se aproximeze soluția sistemului neliniar $\begin{cases} x^2 - 2x - y + 0.5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ pornind de la valorile inițiale $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (2, 0.25)$.

Rezolvare: Notăm $\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 - 2x - y + 0.5 \\ f_2(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 \end{cases}$ și calculăm Jacobianul

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2 & -1 \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$$

Pasul 1.1 Se calculează $\begin{cases} f_1\left(x^{(0)},y^{(0)}\right) = 0.25 \\ f_2\left(x^{(0)},y^{(0)}\right) = 0.25 \end{cases}$

Pasul 1.2 Se calculează $J\left(x^{(0)},y^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Pasul 1.3 Se rezolvă sistemul $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ și se găsește

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.09375 \\ 0.06250 \end{pmatrix}$$

Pasul 1.4 Se calculează $\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.09375 \\ 0.06250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.90625 \\ 0.31250 \end{pmatrix}$

Pasul 2.1 Se calculează $\begin{cases} f_1\left(x^{(1)},y^{(1)}\right) = 0.00878 \\ f_2\left(x^{(1)},y^{(1)}\right) = 0.02441 \end{cases}$

Pasul 2.2 Se calculează $J\left(x^{(1)},y^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1.8125 & -1 \\ 3.8125 & 2.5 \end{pmatrix}$

Pasul 2.3 Se rezolvă sistemul $\begin{pmatrix} 1.8125 & -1 \\ 3.8125 & 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.00878 \\ 0.02441 \end{pmatrix}$ și se găsește $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00556 \\ -0.00129 \end{pmatrix}$

Pasul 2.4 Se calculează

$$\begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.90625 \\ 0.31250 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00556 \\ -0.00129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.900691 \\ 0.311213 \end{pmatrix}$$

MATLAB

```
function [r,niter]=MNR(f,J,x0,tol,rerror,max1)
% f se da ca un fisier function si contine ecuatiile
% J este un fisier function si contine Jacobianul
% x0 = valorile initiale
% max1 = numarul maxim de iteratii
Jc=rcond(feval(J,x0));
if Jc<1e-10
    error('Incercati alta valoare x0')
end
xv=x0(:);
xn=xv-inv(feval(J,xv))*(feval(f,xv));
for k=1:max1
    xv=xn;
    niter=k
    xn=xv-inv(feval(J,xv))*(feval(f,xv));
    if (norm(feval(f,xn))<tol|norm(xv-xn,'inf')/norm(xn,'inf')<tol)|...
    (niter==max1)
        break
    end
end
r=xn
```

- ```
  function w=func(x)
  w(1)=x(1)^2-2*x(1)-x(2)+0.5;
  w(2)=x(1)^2+4*x(2)^2-4;
  w=w(:);
  ```
- ```
  function S=mj(x)
  S=[2*x(1)-2,-1;2*x(1),8*x(2)];
  ```
- ```
  [r,iter]=MNR('func','mj',...
          [2,0.25],eps,eps,9)
  ```


Exerciții

Să se aproximeze soluțiile următoarelor sisteme cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 - y - 0.5x + 0.1 = 0 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (1.3, 1)$ sau $(-0.8, 1.2)$;
2. $\begin{cases} 2xy - 3 = 0 \\ x^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (3, 2)$
3. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ x^2 - 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (1.5, 0.5)$ sau $(-0.25, 1.1)$
4. $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y - 8 = 0 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (-1, 1)$ sau $(3, -3.4)$
5. $\begin{cases} 2x^3 - y^2 = 1 \\ xy^3 - y = 4 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (1.2, 1.7)$
6. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y^3 - 2 = 0 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (-1, -0.5)$
7. $\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0.785 \\ xy = 1 \end{cases}$, $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = (0.9, 1.1)$
  ```