Metode numerice și statistică
Curs 2

lect. Ciprian Deliu
cdeliu@tuiasi.ro
moodle.deliu.ro

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași
Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie și Ingineria Mediului

2020

Metoda lui Newton

- Presupunem că ecuația
$$f(x) = 0$$
are o singură rădăcină în intervalul $[a,b]$ și funcția $f \in C^2(a,b)$, $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.
- Tangenta la graficul lui f există în fiecare punct și va fi de aceeași parte a graficului (dedesubt sau deasupra)
- Rădăcina α se poate aproxima ca limită a șirului x_n definit prin procedeul iterativ:
$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ k = 0,1,2,\dots$$
în care $x_0 \in [a,b]$ satisface condiția $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
- O altă condiție care trebuie verificată pentru a asigura convergența aproximațiilor este
$$\frac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2} \leq \lambda < 1, \ \forall x \in (a,b)$$
- Condiția de oprire: $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$

Exemplu

Să se aproximeze cu metoda lui Newton rădăcina ecuației
$$2x \ln x = 1$$
care se găsește în intervalul $[1,2]$ cu o eroare $\varepsilon = 10^{-3}$.
Rezolvare: Funcția din problemă este $f(x) = 2x\ln x - 1$.
- Calculăm $f(1) = -1$ și $f(2) = 1.7726$, deci $f(1)\cdot f(2) < 0$.
- Luăm ca aproximantă inițială mijlocul intervalului, deci $x_0 = 1.5$
- Verificăm condițiile cerute asupra funcției f: $f'(x) = 2(\ln x + 1)$ și $f''(x) = \frac{2}{x}$
 1. $f(x_0)\cdot f''(x_0) = 4\ln x_0 - \frac{2}{x_0} = 0.2885 > 0$
 2. $\dfrac{|f(x)f''(x)|}{(f'(x))^2} \leq \dfrac{f(2)f''(2)}{(f'(2))^2} = 0.62 = \lambda < 1$ pentru orice $x \in (1,2)$.

Aplicăm procedeul iterativ și punem rezultatele în următorul tabel:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	1.5	0.2164	2.8109	0.077
1	1.423	0.004	2.7055	0.0015
2	1.422	0.0013	2.7041	0.0005
3	1.422			

procedura MATLAB:

```
function [p0,err,k,y]=mnewton(f,df,p0,delta,epsilon,max1)
for k=1:max1
    p1=p0-feval(f,p0)/feval(df,p0);
    err=abs(p1-p0);
    relerr=2*err/(abs(p1)+delta);
    p0=p1;
    y=feval(f,p0);
    if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y)<epsilon),break,end
end
```

- funcția $f(x)$:
```
function y=fn(x)
y=2*x*log(x)-1;
end
```
- derivata $f'(x)$:
```
function y=fn1(x)
y=2*log(x)+2;
end
```
- $p0$ valoarea inițială
- delta = eroarea pentru rădăcină
- epsilon = eroarea pentru $f(p0)$
- max1 = numărul maxim de iterații

```
[p0,err,k,y]=mnewton('fn','fn1',1.5,0.001,0.001,5)
```

unde $p0$ = rădăcina, err = eroarea, k = numărul de iterații, $y = f(p0)$

Metoda secantei

Dacă în metoda lui Newton se face aproximarea $f'(x_k) \simeq \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ se obține metoda iterativă a secantei, în care
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$
unde aproximantele inițiale x_0, x_1 pot fi extremitățile intervalului cu rădăcina.
Exemplu: Să se aproximeze cu metoda secantei rădăcina ecuației $2x\ln x = 1$ care se găsește în intervalul $[1,2]$ cu o eroare $\varepsilon = 10^{-3}$.
Rezolvare: Considerăm $x_0 = 1$ și $x_1 = 2$. Obținem iterațiile:
- $x_2 = 2 - \dfrac{f(2)(2-1)}{f(2) - f(1)} = 1.3607$
- $x_3 = 1.3607 - \dfrac{f(1.3607)(1.3607-2)}{f(1.3607) - f(2)} = 1.4142$
- $x_4 = 1.4142 - \dfrac{f(1.4142)(1.4142-1.3607)}{f(1.4142) - f(1.3607)} = 1.4220$
- $x_5 = 1.4220 - \dfrac{f(1.4220)(1.4220-1.4142)}{f(1.4220) - f(1.4142)} = 1.4220$

Se observă că x_4 și x_5 au primele trei zecimale care coincid, deci $\alpha \simeq x_5 = 1.422$.

procedura MATLAB:

```
function [x1,err,k,y]=msecant(f,x0,x1,delta,epsilon,max1)
for k=1:max1
    x2=x1-feval(f,x1)*(x1-x0)/(feval(f,x1)-feval(f,x0));
    err=abs(x2-x1);
    relerr=2*err/(abs(x2)+delta);
    x0=x1;
    x1=x2;
    y=feval(f,x1);
    if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y)<epsilon),break,end
end
```

- funcția $f(x)$:
```
function y=fn(x)
y=2*x*log(x)-1;
end
```
- $x0, x1$ = capetele intervalului inițial
- delta = eroarea pentru rădăcina α
- epsilon = eroarea pentru $f(\alpha)$
- max1 = numărul maxim de iterații

```
[x1,err,k,y]=msecant('fn',1,2,0.001,0.001,20)
```

unde $x1$ = rădăcina, err = eroarea, k = numărul de iterații, $y = f(x1)$

Exerciții

1. Folosind metoda lui Newton să se aproximeze rădăcinile următoarelor ecuații cu eroarea $\delta = \varepsilon = 10^{-5}$:
   a. $e^x - 8\cos(2\pi x) = 0, \ x \in [0, 0.4]$
   b. $3^x = 7\sin x, \ x \in [0.1, 0.2]$
   c. $12\cos(\pi x) = 2^x, \ x \in [1.5, 1.6]$ și $x \in [2,3]$
   d. $x^2 - 16\cos(2x) = 0, \ x \in [2,3]$
   e. $4\sin(2x) + x^2 - 4 = 0, \ x \in [1, 1.6]$ și $x \in [2,3]$
   f. $\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \cos x = 0, \ x \in [1, 1.6]$
   g. $2\sin x - 0.7\cos 3x = 0, \ x \in [0,1]$
   h. $0.7\cos 3x - 2\sin x - 1 = 0, \ x \in [-0.5, 0]$
   i. $4^x - 3\cos x = 0, x \in [0,1]$
   j. $e^{-0.2x}\cos 7x + 3x - 1 = 0, \ x \in [0.5, 1]$
2. Să se rezolve ecuațiile de la exercițiul anterior cu metoda secantei și să se compare viteza de convergență.

Metoda eliminării a lui Gauss

Fie sistemul liniar cu n ecuații și n necunoscute:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$
unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Transformări elementare:
- Înmulțirea sau împărțirea unei ecuații cu un scalar;
- Schimbarea a două ecuații între ele;
- Adunarea la o ecuație a unei alte ecuații înmulțită cu un scalar.

Prin aplicarea unor astfel de transformări sistemul inițial poate fi adus la următoarea formă diagonală:
$$\begin{cases} c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & \cdots + & c_{1n}x_n = d_1 \\ & c_{22}x_2 + & \cdots + & c_{2n}x_n = d_2 \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$
care se rezolvă de jos în sus (mai întâi se află x_n din ultima ecuație, apoi x_{n-1} din penultima, ș.a.m.d.). Dacă rangul r al matricei A este mai mic decât n, atunci forma diagonală va fi:
$$\begin{cases} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\dots & +c_{1r}x_r & +\dots & +c_{1n}x_n & = d_1 \\ & c_{22}x_2 & +\dots & +c_{2r}x_r & +\dots & +c_{2n}x_n & = d_2 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & c_{rr}x_r & +\dots & +c_{rn}x_n & = d_r \\ & & & & & 0 & = d_{r+1} \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & = d_n \end{cases}$$
Dacă $d_i = 0, \forall i > r$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat, iar dacă există $i > r$ astfel încât $d_i \neq 0$ atunci sistemul este incompatibil.

Algoritm

Dacă matricea A este nesingulară, pașii algoritmului sunt:

Pasul 1 Se inițializează matricea extinsă $[A, B]$:

$$[A^1, B^1] = \left(\begin{array}{cccc|c} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} & b^1_1 \\ a^1_{21} & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} & b^1_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^1_{n1} & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} & b^1_n \end{array}\right)$$

Pasul 2 Se obțin zerouri pe prima coloană astfel:

Pasul 2.1 Dacă $a^1_{11} = 0$ se schimbă $L_1 \leftrightarrow L_i$ unde $a^1_{i1} \neq 0$ (există un astfel de $i > 1$ deoarece matricea A este nesingulară);

Pasul 2.2 $L_k \leftarrow L_k - \frac{a^1_{k1}}{a^1_{11}} L_1$ pentru $k = 2, 3, \dots, n$ și se obține

$$[A^2, B^2] = \left(\begin{array}{cccc|c} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} & b^1_1 \\ 0 & a^2_{22} & \dots & a^2_{2n} & b^2_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^2_{n2} & \dots & a^2_{nn} & b^2_n \end{array}\right)$$

Pasul 3 Se obțin zerouri pe a doua coloană astfel:

Pasul 3.1 Dacă $a^2_{22} = 0$ se schimbă $L_2 \leftrightarrow L_i$ unde $a^2_{i2} \neq 0$ (există un astfel de $i > 2$ deoarece matricea A este nesingulară);

Pasul 3.2 $L_k \leftarrow L_k - \frac{a^2_{k2}}{a^2_{22}} L_2$ pentru $k = 3, \dots, n$ și se obține

$$[A^3, B^3] = \left(\begin{array}{ccccc|c} a^1_{11} & a^1_{12} & a^1_{13} & \dots & a^1_{1n} & b^1_1 \\ 0 & a^2_{22} & a^2_{23} & \dots & a^2_{2n} & b^2_2 \\ 0 & 0 & a^3_{33} & \dots & a^3_{3n} & b^3_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a^3_{n3} & \dots & a^3_{nn} & b^3_n \end{array}\right)$$

Pasul n $$[A^n, B^n] = \left(\begin{array}{cccc|c} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} & b^1_1 \\ 0 & a^2_{22} & \dots & a^2_{2n} & b^2_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^n_{nn} & b^n_n \end{array}\right)$$

Sistemul având matricea triunghiulară superior obținută la ultimul pas se rezolvă prin substituție inversă.

Exemplu

Fie sistemul $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 23 \end{cases}$. Efectuăm următoarele transformări elementare asupra matricei extinse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 23 \end{array}\right) \underset{L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{L_3 - 2L_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 8 \\ & -x_2 & -4x_3 & = -14 \\ & & 9x_3 & = 27 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3 \Rightarrow$$

$$-x_2 - 12 = -14 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + 4 + 3 = 8 \Rightarrow x_1 = 1.$$

MATLAB

```
function X=mgauss(A,B)
[N,N]=size(A);
X=zeros(N,1);
C=zeros(1,N+1);
AT=[A B];
for p=1:N-1
    [Y,j]=max(AT(p:N,p));
    C=AT(p,:);
    AT(p,:)=AT(j+p-1,:);
    AT(j+p-1,:)=C;
    if AT(p,p)==0;
        'A singulara. Nedeterminare'
        break
    end
    for k=p+1:N
        m=AT(k,p)/AT(p,p);
        AT(k,p:N+1)=AT(k,p:N+1)-m*AT(p,p:N+1)
    end
end
X=AT(1:N,1:N)\AT(1:N,N+1);
```

- se definesc A și B:

```
A=[1 2 1;2 3 -2;3 4 4]
B=[8;2;23]
```

- Procedura se apelează cu sintaxa

```
X=mgauss(A,B)
```


Exerciții

Folosind metoda eliminării a lui Gauss să se rezolve $AX = B$ pentru:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Metoda factorizării triunghiulare

Definiție

O matrice pătratică A de ordin n, nesingulară, are o **factorizare triunghiulară** *dacă poate fi scrisă ca produsul dintre o matrice triunghiulară inferior L și o matrice triunghiulară superior U, adică*

$$A = LU$$

- Fie sistemul $AX = B$. Dacă matricea A admite o factorizare triunghiulară, atunci sistemul se rescrie
$$LUX = B$$
- Dacă introducem notația $Y = UX$, atunci soluția sistemului se poate obține rezolvând succesiv sistemele
$$LY = B \text{ și } UX = Y$$
- Factorizarea triunghiulară a matricei A se poate obține plecând de la identitatea $A = I_n A$ și la fiecare pas k se obțin zerouri pe coloana k sub diagonala principală a lui A folosind transformările elementare de la metoda lui Gauss, iar în I_n se înlocuiesc zerourile de sub diagonala principală de pe coloana k cu coeficienții corespunzători acestor transformări.

Exemplu

Să se rezolve prin metoda factorizării triunghiulare sistemul $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$LY = B \Rightarrow \begin{cases} y_1 & = -4 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 & = 10 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = 12 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$UX = Y \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ 3x_2 + 6x_3 = 12 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

MATLAB:

```
A=[2 4 -6;1 5 3;1 3 2];
B=[-4;10;5];
[L,U]=lu(A);
Y=L\B;
X=U\Y
```

Exerciții:
Folosind metoda factorizării triunghiulare să se rezolve sistemele:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + 11x_3 - 9x_4 = 13 \\ 4x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$